Transformimi i Laplasit dhe zbatimet e tij
(Ligjërata e parë)

1. Transformimi i Laplasit

- **Përkufizimi**: Transformimi i Laplasit i sinjalit $x(t)$ përkufizohet si

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

ku variabëli s është madhësi komplekse $s = \sigma + j\omega = \mathrm{Re}[s] + j\,\mathrm{Im}[s]$

- Për arsye të kufijve të integralit, përkufizimi i sipërm quhet transformimi dyanësor i Laplasit.
- Zbatim më të madh praktik ka transformimi njëanësor i Laplasit

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- Transformimi njëanësor merr parasysh vetëm pjesën shkakësore të sinjalit $x(t)$.
- Përveç në disa veti (që do të ceken më vonë), transformimi njëanësor nuk dallon nga ai dyanësori.

- *Marrëveshje për shënim*: Çiftimi i sinjalit $x(t)$ me transformimin e tij $X(s)$ do të shënohet me

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) \text{ ose } x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

por edhe në me simbolikë të veprimit të operatorit L në $x(t)$

$$X(s) = \int_{0 \text{ ose } -\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = L\left[x(t)\right]$$

- **Shembuj të transformimit të Laplasit për disa sinjale elementare**

1. Delta impulsi $\delta(t)$

$$L\left[\delta(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

- Transformimi konvergjon (ekziston) për çfarëdo vlere të $s \in C$.
- Për delta impulsin e zhvendosur vlen

$$L\left[\delta(t-t_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

2. Sinjali shkallë njësi $u(t)$

- Sinjali shkallë njësi nuk ka transformim Furie në kuptimin e zakonshëm, por ka transformim të Laplasit.

$$L\left[u(t)\right] = \int_{0}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s}\left[1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t}\right] = \frac{1}{s}, \ \sigma > 0$$

- Transformimi konvergjon për anën e majtë të planit s (σ>0), që kufizohet me boshtin imagjinar $s=j\omega$, duke mos përfshirë atë.

3. Sinjali shkakësor eksponencial $x(t)=e^{at}u(t)$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \left.\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\right|_{t=\infty}^{t=0}$$

$$= \frac{1}{s-a}\left[1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(s-a)t}\right] = \frac{1}{s-a}, \ \sigma > \mathrm{Re}\{a\}$$

- Transformimi konvergjon për σ>Re{a}.

4. Sinjali shkakësor linear $x(t)=tu(t)$

$$X(s)=\int_0^\infty te^{-st}dt=-\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[e^{-st}\right]dt=-\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$=-\frac{d(1/s)}{ds}=\frac{1}{s^2},\quad \sigma>0$$

- **Zona e konvergjencës së transformimit**

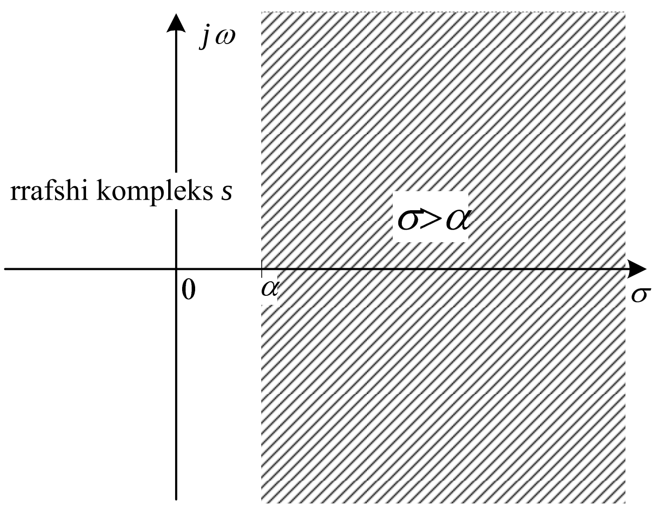
- Bashkësia e vlerave të domenit s për të cilat shprehja e transformimit është e fundme quhet zonë e konvergjencës së transformimit.
- Transformim të Laplasit kanë të gjitha sinjalet e rendit ekspoencial.
- Sinjal shkakësor $x(t)$ i rendit eksponencial α quhet ai sinjal që ka tendencë më të vogël të rritjes se sinjali eksponencial.

$$|x(t)|<Ae^{\alpha t},\quad 0<t<\infty$$

$$|X(s)|=\left|\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt\right|\le\int_0^\infty\left|x(t)e^{-st}\right|dt\le\int_0^\infty|x(t)|\left|e^{-(\sigma+j\omega)t}\right|dt$$

$$\int_0^\infty|x(t)|\left|e^{-(\sigma+j\omega)t}\right|dt<A\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-\sigma t}dt=\frac{A}{\sigma-\alpha}\left[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(\sigma-\alpha)t}\right]$$

$$|X(s)|<\infty \text{ nëse } \sigma>\alpha$$



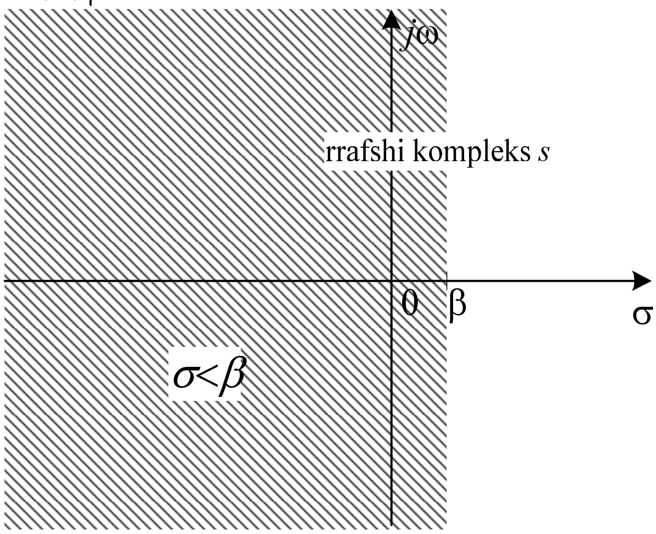
zona e konvergjencës për sinjalin shkakësor të rendit eksponencial

- Ngjashëm përkufizohet edhe sinjali kundërshkakësor $x(t)$ i rendit eksponencial β.

$$\left|x(t)\right| < Be^{\beta t}, \quad -\infty < t < 0$$

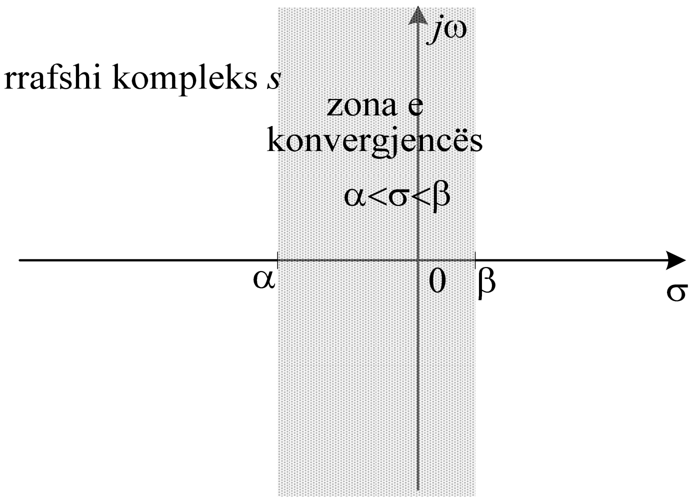
$$\left|X(s)\right| \le \int_{-\infty}^{0} \left|x(t)\right| \left|e^{-(\sigma+j\omega)t}\right| dt < B\int_{-\infty}^{0} e^{\beta t} e^{-\sigma t} dt = \frac{B}{\beta-\sigma}\left[1-\lim_{t\to-\infty} e^{(\beta-\sigma)t}\right]$$

$$\left|X(s)\right| < \infty \text{ nëse } \sigma < \beta$$



zona e konvergjencës për sinjalin kundërshkakësor të rendit eksponencial

- Kur sinjali është i pakufizuar në kohëzgjatje nga të dyja anët, zona e konvergjencës ka trajtën e shiritit $\alpha<\sigma<\beta$.



- Nëse $\beta<\alpha$ atëherë nuk ka as zonë të konvergjencës e as transformim të sinjalit.
- Për sinjalin me kohëzgjatje të fundme nëse arrihet që të provohet konvergjenca e transformimit vetëm në një pikë, atëherë transformimi do të konvergjoj në tërë rrafshin s.

- **Shembulli 1**: Të caktohet transformimi i sinjalit kundërshkakësor $x(t)$=-$u(-t)$.

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-st}dt=\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{s},\quad \sigma<0$$

- Fitohet shprehja e njëjtë si për transformimin e $u(t)$, por zona e konvergjencës ndryshon.
- **Shembulli 2**: Të caktohet transformimi i sinjalit me kohëzgjatje të pakufizuar nga të dy anët $x(t)=e^{-a|t|}$, $-\infty<t<\infty$ dhe $a>0$.

$$X(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}=-\frac{2a}{s^2-a^2},\quad -a<\sigma<a$$

- Integrali i parë konvergjon për $\sigma<a$ ndërsa i dyti për $\sigma>-a$.

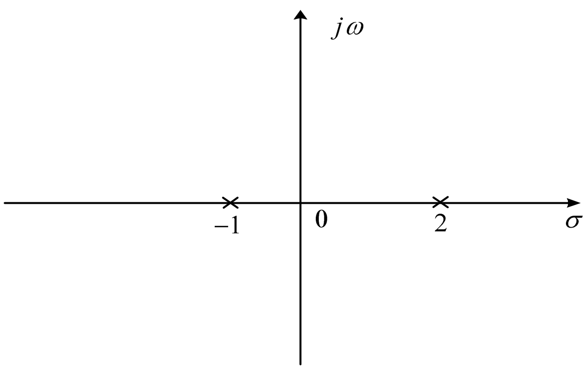
- **Shembulli 3**: Është dhënë transformimi i Laplasit me shprehjen:

$$X(s)=\frac{3}{(s+1)(s-2)}$$

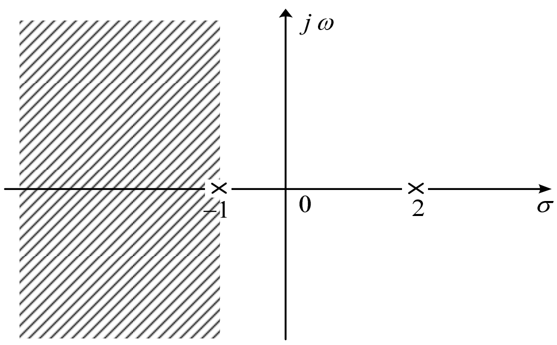
të përcaktohen të gjitha zonat e konvergjencës që i përkasin këtij transformimi dhe sinjalet gjegjëse.

- **Zgjidhje**: Polet e transformimit gjenden në pikat s=-1 dhe s=2. Këto i përcaktojnë zonat e mundshme të konvergjencës.

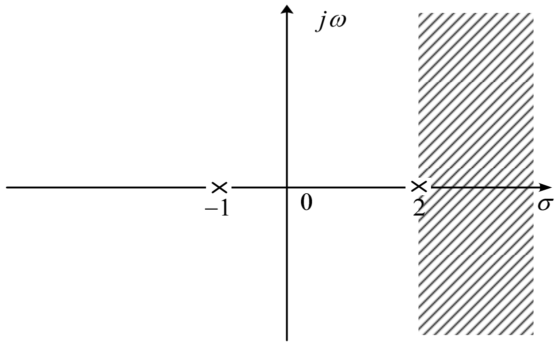
Pozita e poleve të $X(s)$



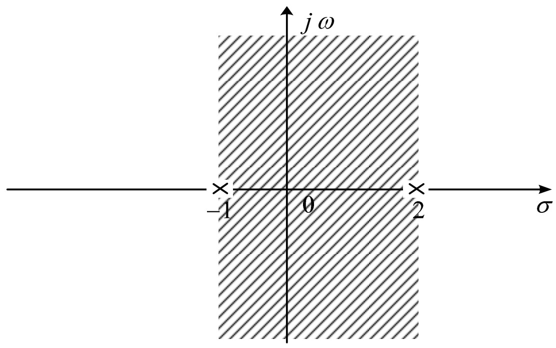
Zona 1 – Sinjali kundërshkakësor



Zona 2 – Sinjali shkakësor



Zona 3 – Sinjali me kohëzgjatje të pafundme nga të dy anët



- $X(s)$ zbërthehet në thyesa të pjesshme

$$X(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$

- Çiftet transformuese për sinjalet eksponenciale shkakësore dhe kundërshkakësore janë:

$$a^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a},\ \sigma > a \qquad -a^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a},\ \sigma < a$$

- Zona e konvergjencës **1** - (σ<-1) – Të dy polet gjenden djathtas nga zona, prandaj sinjalet që i përgjigjen të dy poleve janë kundërshkakësorë.

$$x_1(t) = e^{-t}u(-t) - e^{2t}u(-t)$$

- Zona e konvergjencës **2** - (σ>2) – Të dy polet gjenden majtas nga zona, prandaj sinjalet që i përgjigjen të dy poleve janë shkakësorë.

$$x_2(t) = -e^{-t}u(t) + e^{2t}u(t)$$

- Zona e konvergjencës **3** - (-1<σ<2) – Poli në s=-1 gjendet në të majtë të z.k. dhe ky pol jep pjesën shkakësore të sinjalit, ndërsa poli në s=2 pasi që gjendet në të djathtë të z.k. prodhon sinjal kundërshkakësor.

$$x_3(t) = -e^{-t}u(t) - e^{2t}u(-t)$$

2. Vetitë e transformimit të Laplasit

1. Lineariteti

- Shumës së peshuar (kombinimit linear) të hyrjeve i përgjigjet kombinimi linear i transformimeve përkatëse me pesha të njëjta.

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \text{ dhe } x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \;\Rightarrow\; ax_1(t)+bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s)+bX_2(s)$$

- Zona e konvergjencës së $X(s)$ formohet nga bashkësia vlerave të s për të cilat bashkërisht konvergjojnë $X_1(s)$ dhe $X_2(s)$.
- **Shembulli 4**: Duke përdorë vetinë e linearitetit të përcaktohet transformimi i sinjalit:

$$\cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$$

- **Zgjidhje**: Mbështetemi në transformimin e njohur të sinjalit eksponencial

$$e^{j\omega t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-j\omega},\ \sigma > 0 \qquad e^{-j\omega t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+j\omega},\ \sigma > 0$$

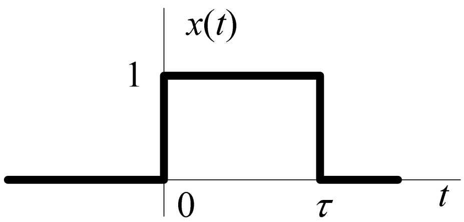
$$X(s) = L\left[x(t)\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \xleftrightarrow{L} \cos(\omega t)u(t),\quad \sigma > 0$$

2. Zhvendosja në kohë

- Sinjali i zhvendosur për t_0 çiftohet me transformimin:

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s),$$

- Vetia vlen pa kufizim vetëm për transformimin dyanësor, pra si për vlera pozitive ashtu edhe për vlera negative të zhvendosjes t_0.
- Te transformimi njëanësor i Laplasit vetia vlen vetëm për vlera pozitive të t_0, pra për t_0<0 vetia nuk vlen.
- **Shembulli 5**: Të përcaktohet transformimi i sinjalit puls si në figurë.



- **Zgjidhje**: Mbështetemi në transformimin e sinjalit shkallë njësi, sepse $x(t)$ mund të përshkruhet me:

$$x(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

- Dimë se

$$u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s} \quad \text{dhe} \quad u(t-\tau)\xleftrightarrow{L}\frac{e^{-s\tau}}{s}$$

- Nga vetia e linearitetit fitohet:

$$X(s)=\frac{1-e^{-s\tau}}{s}$$

- Zona e konvergjencës përfshin tërë rrafshin s.

3. Zhvendosja në domenin *s*

- Nëse $x(t)\leftrightarrow X(s)$ atëherë vlen

$$e^{s_0 t}x(t)\leftrightarrow X(s-s_0)$$

- Zona e konvergjencës së $X(s\text{-}s_0)$ zhvendoset për $\mathrm{Re}[s_0]$ ndaj asaj të $X(s)$.

- **Shembulli 6**: Të përcaktohet transformimi i sinjalit:

$$x(t)=e^{at}\cos(\omega t)u(t)$$

- **Zgjidhje**:

$$e^{at}\cos(\omega t)u(t)=e^{at}\frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right]u(t)=\frac{1}{2}e^{(a+j\omega)t}u(t)+\frac{1}{2}e^{(a-j\omega)t}u(t)$$

$$X(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s-a-j\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-a+j\omega}=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

- Zona e konvergjencës së transformimit të sinjalit shkallë njësi është $\sigma>0$, ndërsa zona e konvergjencës së $X(s)$ do të jetë $\sigma>a$.:

4. Shkallëzimi në kohë

- Nëse $x(t)\leftrightarrow X(s)$ dhe a ka vlerë reale atëherë vlen

$$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

- Zona e konvergjencës gjithashtu shkallëzohet $R_1=aR$.

- **Shembulli 7**: Sinjali shkallë njësi me shkallëzim të domenit kohor nuk e ndryshon trajtën e vet funksionale. Vërtetë, $u(at)=u(t)$, për çfarëdo $a>0$. Të verifikojmë këtë edhe në domen të transformimit

$$L\left[u(at)\right]=\frac{1}{a}\frac{1}{(s/a)}=\frac{1}{s}=L\left[u(t)\right]$$

5. Vetia e thurjes në kohë

- Nëse $x_1(t)\leftrightarrow X_1(s)$ dhe $x_2(t)\leftrightarrow X_2(s)$, me zona të konvergjencës R_1, përkatësisht R_2, atëherë:

$$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

- Z.k. e prodhimit të transformimeve fitohet si prerje e zonave të transformimeve të pjesshme. Kjo nuk vlen kur në $X_1(s)X_2(s)$ paraqitet anulimi i zerove me pole (Shiko shembullin vijues!)

- **Shembulli 8**: Le të marrim se i kemi dy sinjale shkakësore të dhëna përmes transformimeve të tyre:

$$X_1(s)=\frac{s}{s+1} \quad \text{dhe} \quad X_2(s)=1+\frac{1}{s}$$

- Zona e konvergjencës së $X_1(s)$ është e përcaktuar me $\sigma>-1$, ndërsa ajo e $X_2(s)$ me $\sigma>0$. Prerja e zonave të konvergjencës për prodhimin $X_1(s)X_2(s)$ do të rezultonte me z.k. $\sigma>0$. Por në prodhimin

$$X_1(s)X_2(s)=\frac{s}{s+1}\frac{s+1}{s}=1$$

- ku zeroja në $\sigma=-1$ anulohet me polin në $\sigma=-1$, duke rezultuar me transformim të $\delta(t)$ që ka për z.k. Tërë rrafshin z.

6. Vetia e diferencimit në kohë

- Në qoftë se $X(s)$ është *transformimi njëanësor* i $x(t)$, atëherë për derivatin e $x(t)$ vlen:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0)$$

- Zona e konvergjencës mbetet e njëjtë me atë të $X(s)$, pos në rastin kur $X(s)$ ka pol në s=0, me ç'rast ky pol anulohet dhe për rrjedhojë zona e konvergjencës ndryshon.
- **Vërtetimi**:

$$\frac{dx(t)}{dt}e^{-st} = \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-st}\right] + sx(t)e^{-st}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt}_{L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]} = s\underbrace{\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt}_{X(s)} + \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-st}\right]dt$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-st}\right]dt = \lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} - x(0)e^{-s0} = 0 - x(0) = -x(0)$$

- Vetia mund të zgjerohet edhe për transformimin e derivatit të dytë

$$\int_0^\infty \frac{d^2x(t)}{dt^2}e^{-st}dt = s\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = s\left[X(s) - x(0)\right] - x^{(1)}(0)$$

$$= s^2X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0)$$

- si dhe për transformimet më të larta të $x(t)$

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

- Transformim dyanësor i rendit arbitrar të derivatit të $x(t)$ merr trajtën:

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX(s)$$

- **Shembulli 9**: Të zgjidhet ekuacioni diferencial për $t \geq 0$ përmes transformimit njëanësor të Laplasit, për kushtet fillestare $x(0)=1$ dhe $x^{(1)}(0)=2$.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+3x=e^{-2t}u(t)$$

- **Zgjidhje**: Zbatojmë veprimin e transformimit në të dy anët e ekuacionit.

$$s^2X(s)-s-2+4\left[sX(s)-1\right]+3X(s)=\frac{1}{s+2}$$

- Pas rregullimit dhe zbërthimit të shprehjes fitojmë,

$$X(s)=\frac{s^2+8s+13}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+1}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

- Nga tabela e çifteve transformuese dhe vetia e linearitetit zgjidhja del në trajtën:

$$x(t)=3e^{-t}-e^{-2t}-e^{-3t},\quad t\geq 0$$

7. Diferencimi në domenin *s*

$$-tx(t)\leftrightarrow\frac{dX(s)}{ds}$$

- Zona e konvergjencës mbetet e njëjtë.
- Në rastin e përgjithshëm, për derivatin e n-të, vlen:

$$(-1)^n t^n x(t)\leftrightarrow\frac{d^nX(s)}{ds^n}$$

- **Shembulli 9**: Duke u mbështetur në vetinë diferencimit, le përcaktojmë transformimin e sinjalit:

$$x(t)=te^{at},t\geq 0,\quad a\in C$$

- **Zgjidhje**:

$$L\left[e^{at}u(t)\right]=X(s)=\frac{1}{s-a},\quad \sigma>\mathrm{Re}[a]$$

$$L\left[te^{at}u(t)\right]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-a}\right]=\frac{1}{(s-a)^2}$$

8. Integrimi në domenin kohor

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

- Zona e konvergjencës formohet si prerje e z.k. së $X(s)$ dhe $\sigma>0$.
- **Vërtetimi**:

$$x(t)*u(t) \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)u(t-\lambda)\,d\lambda = x(t)*u(t)$$

- **Shembulli 10**: Sinjali shkallë njësi përkufizohet si integral i delta impulsit përmes

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\,d\lambda$$

- Meqenëse transformimi i $\delta(t)$ ka vlerë njësi, nëpër tërë rrafshin s, sipas vetisë së integrimit dhe barazimit të sipërm, fitohet:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\,d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

9. Teorema për vlerën fillestare

- Vlera fillestare e sinjalit shkakësor $x(0)$ mund të përcaktohet nga $X(s)$ përmes relacionit:

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

- **Vërtetimi**:

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to\infty} sX(s) - x(0)$$

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}\underbrace{\lim_{s\to\infty} e^{-st}}_{0}\,dt = 0$$

- Sepse Re[s]>0, që është e vlefshme qoftë për arsye se sinjali $x(t)$ është shkakësor, qoftë për atë se është fjala për transformim të njëanshëm.
- **Shembulli 11**: Kemi një transformim të sinjalit shkakësor:

$$X(s) = \frac{4s^2+15s+13}{s^3+6s^2+11s+6}$$

- dhe dëshirojmë ta caktojmë vlerën fillestare të sinjalit $x(0)$. Sipas teoremës kemi:

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \frac{4s^3 + 15s^2 + 13s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = 4$$

11. Teorema për vlerën fundore

- Vlera fundore e sinjalit shkakësor $x(t)$ mund të përcaktohet nga relacioni:

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

- **Vërtetimi**:

$$\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} \underbrace{\lim_{s\to 0} e^{-st}}_{1} dt = \int_0^\infty dx(t) = x(\infty) - x(0) = \lim_{s\to 0} sX(s) - x(0)$$

- Vetia e thurjes në domenin e transformimit s nuk është trajtuar. Kjo veti shprehet përmes integralit i cili nuk zgjidhet lehtë, dhe i si tillë nuk ka ndonjë rëndësi të madhe zbatuese

3. Transformimi i kundërt i Laplasit

- Bazë për përcaktim të shprehjes për transformim të kundërt të Laplasit, mund të shërbejnë shprehjet e çifteve transformuese Furie.
- Sipas interpretimit më të drejtpërdrejtë, transformimi Furie $X(\omega)$ paraqet vlerat e transformimit të Laplasit, $X(s)$, nëpër boshtin imagjinar $j\omega$.

$$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) e^{-\sigma t} \right] e^{-j\omega t} dt = F\left[x(t) e^{-\sigma t} \right]$$

- Transformimi i Laplasit i sinjalit $x(t)$ mund të interpretohet edhe si transformim Furie i sinjalit $x(t)e^{-\sigma t}$. Me këtë shmanget problemi i përfshirjes së boshtit imagjinar në zonën e konvergjencës.

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- ose

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

- Me zëvendësim të variabëlit $s=\sigma+j\omega$, duke mbajtur vlerën e σ të pandryshueshme, kemi këto rrjedhime: $ds=jd\omega$ dhe ndryshimin e kufijve të integralit nga $[-\infty,\infty]$ në $[\sigma-j\infty,\sigma+j\infty]$.

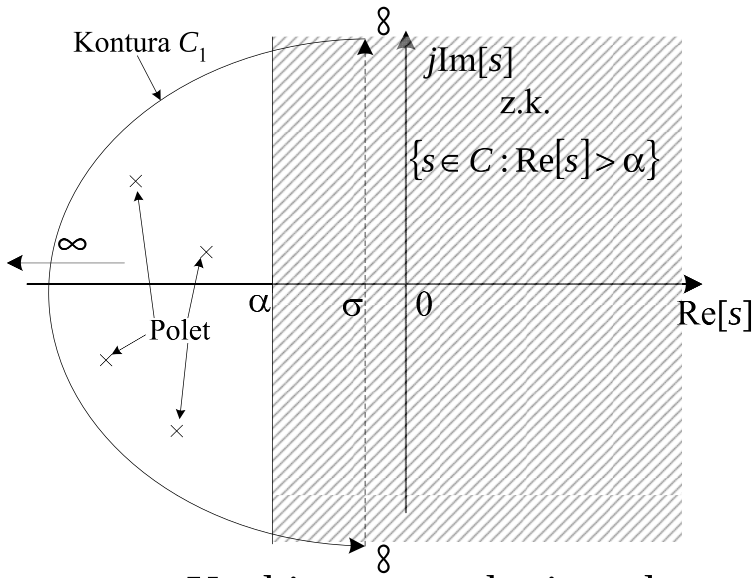
$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$$

- Shtegu i integrimit në rrafshin kompleks s është drejtëza paralele me boshtin imagjinar në distancë σ nga zeroja e abshisës dhe me skaje që shkojnë nga $-j\infty$ deri në $j\infty$.
- Zgjidhja e këtij integrali është e ndërlikuar. Prandaj ky shndërrohet në integral nëpër lak të mbyllur duke supozuar:

$$\lim_{s\to\infty}\left|X(s)\right|=0$$

- fitohet

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(s)e^{st}ds$$



$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(s)e^{st}ds$$

- Teorema e Koshi-ut për mbetje pohon se me rastin e njehsimit të integralit nëpër lak të mbyllur, vetëm polet e $X(s)$ kanë efekt në vlerën e integralit.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=p_k}\left[X(s)e^{st}\right]$$

- Mbetja e $X(s)$ për polin e m-fishtë në $s=p_k$ llogaritet me formulën:

$$\operatorname*{Res}_{s=p_k} X(s) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-p_k)^m X(s)\right]\Big|_{s=p_k}$$

- Për pole të thjeshta apo të njëfishta kjo formulë merr trajtën:

$$\operatorname*{Res}_{s=p_k} X(s) = \left[(s-p_k) X(s)\right]\Big|_{s=p_k}$$

- **Shembulli 12**: Le të jetë dhënë transformimi i njëanshëm me shprehjen:

$$X(s) = \frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

- dhe duhet të caktohet sinjali shkakësor $x(t)$ që ka këtë transformim**.**

$$x(t) = L^{-1}\left[X(s)\right] = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} e^{-t} + (s+3)X(s)\Big|_{s=-3} e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{s+3}\Big|_{s=-1} e^{-t} + \frac{1}{s+1}\Big|_{s=-3} e^{-3t} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

- **Shembulli 13**: Le të jetë dhënë transformimi i njëanshëm:

$$X(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

- Të caktohet sinjali $x(t)$ që ka këtë transformim**.**

$$X(s) = \frac{1}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

$$x(t) = L^{-1}\left[x(t)\right] = (s+1-j)X(s)\Big|_{s=-1+j} e^{(-1+j)t} + (s+1+j)X(s)\Big|_{t=-1-j} e^{(-1-j)t}$$

$$= \frac{1}{s+1+j}\Big|_{s=-1+j} e^{(-1+j)t} + \frac{1}{s+1-j}\Big|_{s=-1-j} e^{(-1-j)t}$$

$$= \frac{1}{2j}e^{(-1+j)t} - \frac{1}{2j}e^{(-1-j)t} = e^{-t}\frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right) = e^{-t}\sin t, \quad t \geq 0$$

- **Shembulli 14**: Le t'i kemi të dhëna dy raste të transformimit të njëanshëm, si më poshtë,

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \text{ dhe } X_2(s) = \frac{1}{(s+a)^3}$$

- ku a është një konstantë e çfarëdoshme, komplekse apo reale.
- Për rastin e parë të polit të dyfishtë në s=-a, kemi

$$x_1(t) = \operatorname*{Res}_{s\to -a} \frac{e^{st}}{(s+a)^2} = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\frac{(s+a)^2 e^{st}}{(s+a)^2}\bigg|_{s=-a} = \frac{d}{ds}e^{st}\Big|_{s=-a} = t\,e^{st}\Big|_{s=-a} = te^{-at},\ t \geq 0$$

- ndërsa për të dytin të polit të trefishtë në s=-a,

$$x_2(t) = \operatorname*{Res}_{s\to -a} \frac{e^{st}}{(s+a)^3} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\frac{(s+a)^3 e^{st}}{(s+a)^3}\bigg|_{s=-a} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}e^{st}\Big|_{s=-a} = \frac{t^2}{2}e^{-at},\ t \geq 0$$

- Në qoftë se rendi i polinomit në numërues është i njëjtë me atë të emëruesit, atëherë nuk vlen supozimi:

$$\lim_{s\to\infty} X(s) = 0$$

- Në këto raste, para se të përcaktohet transformimi i kundërt, polinomi i numëruesit pjesëtohet me atë të emëruesit, ashtu që të fitohet shprehja e mirëfilltë racionale.
- Le të marrim një funksion racional në trajtën e përgjithshme

$$X(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- për të cilën qartazi vlen:

$$\lim_{s\to\infty} X(s) = b_n$$

- Përcaktimi i transformimit të kundërt për një rast të tillë është ilustruar në shembullin vijues.

- **Shembulli 14**: Të kemi në trajtim rastin e transformimit të njëanshëm
$$X(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+5s+6}$$
- ku
$$\lim_{s\to\infty} X(s) = 2 \neq 0$$
- Prandaj shprehja e $X(s)$ qitet në trajtën:
$$X(s) = 2 - \underbrace{\frac{10s+7}{(s+3)(s+2)}}_{R(s)}$$
- Për termin e parë vlen $L^{-1}[2] = 2\delta(t)$
- Zgjidhja e plotë do të jetë
$$x(t) = 2\delta(t) + \left[-\frac{10s+7}{s+2}\right]\Bigg|_{s=-3} e^{-3t} + \left[-\frac{10s+7}{s+3}\right]\Bigg|_{s=-2} e^{-2t}$$
$$= 2\delta(t) - 23e^{-3t} + 13e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

- Rasti tjetër karakteristik që lajmërohet shpesh në shprehjet e transformimit të Laplasit është ai funksioneve transcendentale, ku përveç funksionit racional lajmërohen edhe terme të trajtës e^{-st0}.
- Kjo trajtë paraqitet kur sinjali zhvendoset për një interval të caktuar kohor p.sh. në sistemet transportuese.
- Në këto raste marrim parasysh vetinë e zhvendosjes në kohë
$$L\left[x(t-t_0)\right] = e^{-t_0 s} X(s)$$
- **Shembulli 15**: Të marrim se e kemi të dhënë transformimin e njëanësor
$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+s-2} + \frac{e^{3s}}{s+4}$$
- Së pari caktojmë transformimin e termit të parë racional në shprehjen e sipërme,
$$x_1(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s-2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right] = \left(\frac{e^{st}}{s+2}\right)\Bigg|_{s=1} + \left(\frac{e^{st}}{s-1}\right)\Bigg|_{s=-2}$$
$$= \frac{e^t}{3} - \frac{e^{-2t}}{3}, \; t \geq 0$$

- pastaj përcaktohet edhe inversioni për termin e dytë racional

$$x_2(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] = e^{-4t}, \;\; t \geq 0$$

- Në fund, në pajtim me teoremën për zhvendosje në kohë, bëhet zhvendosja për intervalet përkatëse për të fituar zgjidhjen përfundimtare

$$x(t) = \frac{1}{3}\left[e^{t-1} - e^{-2(t-1)}\right]u(t-1) + e^{-4(t+3)}u(t+3)$$